Retournement du triangle

Un jeu Le problème est posé sous la forme d'un puzzle, dix pièces sont disposées de manière à former un triangle équilatéral (pointe en haut) et le jeu consiste à déplacer un minimum de pièces pour obtenir le triangle inversé (pointe en bas). (Les trois pièces bleues de la figure prennent les positions roses).

On esquisse rapidement ci-après le calcul du nombre de pièces à déplacer. Ce nombre est le tiers (ou la partie entière du tiers) du nombre total de pièces. L'explication élémentaire est du niveau d'une classe de première ou d'une classe de terminale des lycées.

FIG. 1 – **Retournement du triangle**

Les nombres triangulaires Un triangle de n pièces sur le côté contient $a(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ pièces, la suite $a(n)$ est la suite des nombres triangulaires, $a = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21 \ldots)$.

Aires de triangles Délaissons momentanément le cas discret pour étudier la superposition d'un triangle équilatéral et de son symétrique. Soit d le côté d'un grands triangle d'aire $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}d^2$. On a $d = a+b+c$ et $d = 3u$. On peut montrer que la région commune aux deux triangles est maximale sur la figure 2 C) et égale à $\frac{2}{3}\mathcal{A}$.

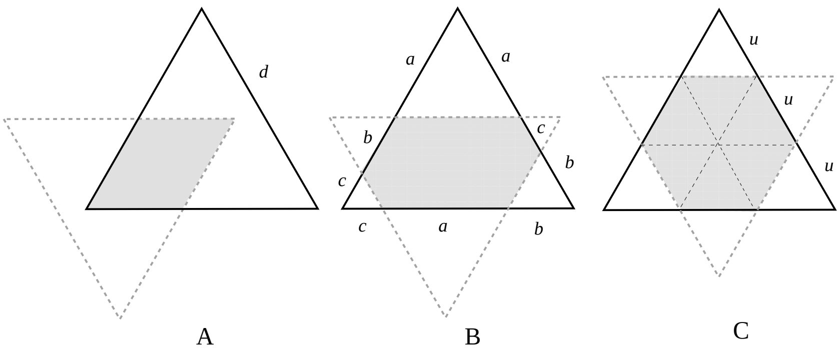

FIG. 2 – **Aires**

Triangles de pièces On se ramène ici essentiellement à deux cas A et B. Le premier, A, correspond à une disposition en parallélogramme de la partie commune et ce parallélogramme contient un maximum de pièces lorsque $u + v = d + 1$ et le nombre de pièces à déplacer est dans ce cas $N = \dfrac{d(d+1)}{2} - u \times v$. N est minimum lorsque $u = v$ ou $u = v + 1$ (selon la parité de d).

$\underline{d = 2u - 1 \text{ est impair :}}$

$$u = v \text{ et } N = \frac{2u(2u-1)}{2} - u^2 = u^2 - u = \frac{d^2-1}{4}.$$

$\underline{d = 2u \text{ est pair :}}$

$$v = u - 1 = \frac{d-2}{2} \text{ et } N = \frac{d(d+1)}{2} - uv = \frac{d(d+1)}{2} - \frac{d^2-2d}{4} = \frac{d^2}{4}.$$

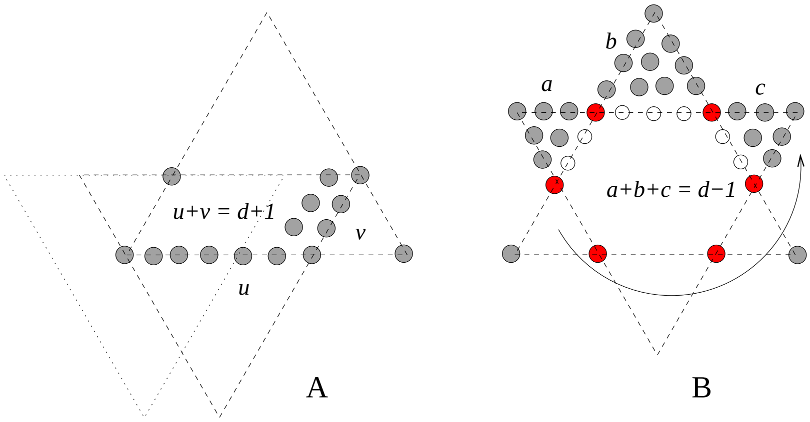

FIG. 3 – **Discret**

Le second cas, B, donnera la solution. Le nombre de pièces à déplacer est la somme des trois nombres triangulaires de rangs a, b et c avec $a + b + c = d - 1$ constant.
La somme est $N = \dfrac{a(a+1) + b(b+1) + c(c+1)}{2} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} + \dfrac{d-1}{2}$ qui est minimale lorsque les nombres a, b, c différent deux à deux de 1 ou sont égaux.
Le tiers du nombre total de pièces est $\dfrac{d^2+d}{6}$.
On va étudier les trois cas $d = 3p + r$, avec $r = 1, 2, 3$.

$\underline{d = 3p + 1,\ a = b = c = p}$

Le nombre de pièces à déplacer est $N = 3\dfrac{p(p+1)}{2}$ et le tiers du nombre total de pièces est $\dfrac{(3p+1)(3p+2)}{6} = 3\dfrac{p(p+1)}{2} + \dfrac{1}{3}$ dont la partie entière est N.

$\underline{d = 3p + 2,\ a = b = p \text{ et } c = p + 1}$

Le nombre de pièces à déplacer est $N = 2\dfrac{p(p+1)}{2} + \dfrac{(p+1)(p+2)}{2} = \dfrac{(p+1)(3p+2)}{2}$ qui est égal au tiers du nombre total de pièces : $\dfrac{(3p+2)(3p+3)}{6} = \dfrac{(3p+2)(p+1)}{2}$.

$\underline{d = 3p + 3,\ a = p \text{ et } b = c = p + 1}$

Le nombre de pièces à déplacer est $N = \dfrac{p(p+1)}{2} + 2\dfrac{(p+1)(p+2)}{2} = frac(p+1)(3p+4)2$ qui est égal au tiers du nombre total de pièces : $\dfrac{(3p+3)(3p+4)}{6} = \dfrac{(p+1)(3p+4)}{2}$.

Dans ces trois cas, pour $d \geq 4$, le nombre de pièces à déplacer est le quotient entier de la division par trois du nombre total de pièces, c'est $\lfloor \dfrac{d(d+1)}{6} \rfloor$

Conclusion commune aux deux cas A et B.

On vérifie que la règle du tiers est encore vraie dans les quatre cas particuliers $0 \leq d \leq 4$ et qu'ensuite, pour $d \geq 4$, le nombre obtenu en B est le meilleur car inférieur à celui obtenu en A (on compare les expressions du second degré en d).

<u>Propriété :</u>
On obtient le triangle retourné en déplaçant $\lfloor \frac{d(d+1)}{6} \rfloor$ pièces du triangle équilatéral de côté d. Ce nombre est le plus petit possible, il est égal au tiers du nombre total de pièces, (en prenant éventuellement la partie entière du quotient).

Suite des valeurs L'expression $s(n) = \lfloor \frac{n(n+1)}{6} \rfloor$ donne la suite entière

0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 12, 15, 18, 22, 26, 30, 35, 40, 45, 51, 57, 63, 70, 77, 84, 92, 100, 108, 117, 126, 135, 145, 155, 165, 176, 187, 198, 210, 222, 234, 247, 260, 273, 287, 301, 315, 330, 345, 360, 376, 392, 408, 425, 442, 459, 477, 495, 513, 532, 551, 570, 590, 610, 630, 651, 672, 693, 715, 737, 759, 782, 805, 828, 852, 876, 900, 925, 950, 975, 1001, 1027, 1053, 1080, 1107, 1134, 1162, 1190, 1218, 1247, 1276, 1305, 1335, 1365, 1395, 1426, 1457, 1488, 1520, 1552, 1584, 1617, 1650, 1683, 1717, 1751, 1785, 1820, 1855, 1890, 1926, 1962, 1998, 2035, ...

Cette suite est répertoriée sous le numéro A001840 dans l'encyclopédie en ligne des suites entières de N.J.A.S.

ANNEXE I

Problème : Quelles valeurs des k, $(1 \leq k \leq n)$, entiers positifs $a_1, a_2, \ldots, a_k$ rendent minimale la somme des carrés $\sum_{i=1}^{i=k} a_i^2$, sachant que la somme $\sum_{i=1}^{i=k} a_i = n$ est fixée et égale à n.

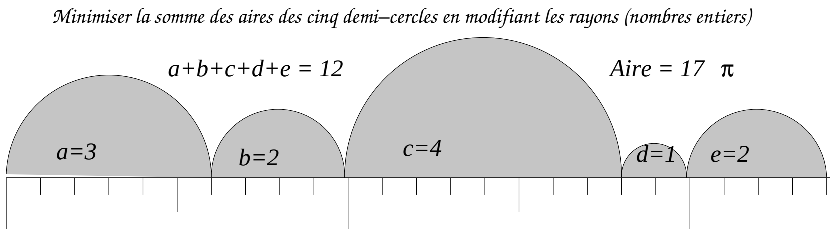

FIG. 4 – **Somme des aires**

Ci-dessous, on considère que la somme $\sum_{i=1}^{i=k} a_i = n$ est fixe.

1) Lorsque $k = 1$ on a $a_1 = n$.

2 a) Lorsque $k = 2$ et $n = 2p$, on peut prendre $a_1 = p - t$ et $a_2 = p + t$ et la siomme des carrés est $(p-t)^2 + (p+t)^2 = 2p^2 + 2t^2 = \frac{1}{2}n^2 + t^2$ qui est minimale lorsque $t = 0$ et que $a_1 = a_2 = p$.

b) Lorsque $k = 2$ et $n = 2p+1$ et en supposant $a_1 < a_2$, on peut prendre $a_1 = p - t$ et $a_2 = p + 1 + t$ avec $t \geq 0$. La somme des carrés est $(p-t)^2 + (p+1+t)^2 = p^2 + (p+1)^2 + 2t + 2t^2$ qui est minimale lorsque $t = 0$ et que $a_1 = p$ et $a_2 = p + 1$.

Lorsque $k = 2$, la somme des carrés des deux nombres est minimale, lorsque les deux nombres sont égaux ou sont différents de 1 (selon que leur somme est paire ou impaire).

3) Lorsque $k > 2$, la somme des carrés est minimale lorsque deux quelconques des nombres sont soit égaux, soit différents de 1.

En effet, si ce n'était pas le cas pour deux de ces nombres, on diminuerait la somme des carrés de ces deux nombres (et donc la somme de tous les carrés) en prenant pour ces deux nombres des valeurs égales ou qui diffèrent de 1.

Propriété Soient $k \geq 1$ entiers positifs de somme fixée égale à n. La somme des carrés de ces entiers est minimale lorsque deux quelconques d'entre eux sont soit égaux, soit différents de 1.

Comme $n = kq + r$ avec $0 \leq r \leq k$, $k - r$ de ces nombres valent $q = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ et les r autres valent $q + 1 = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$, ($q$ est le quotient euclidien de n par k).

Exemple. Sur le schéma, la somme des aires des demi-disques est proportionnelle à la somme des carrés des rayons. Comme $12 = 5 \times 2 + 2$, on prendra donc deux demi-disques de rayon 3 et trois demi-disques de rayon 2. (L'aire s'obtient en multipliant la somme des carrés par $\frac{\pi}{2}$, elle est donc égale à $(3 \times 4 + 2 \times 9)\frac{\pi}{2} = 15\pi$ lorsqu'elle est minimale, au lieu des 17π des demi-disques de la figure précédente).

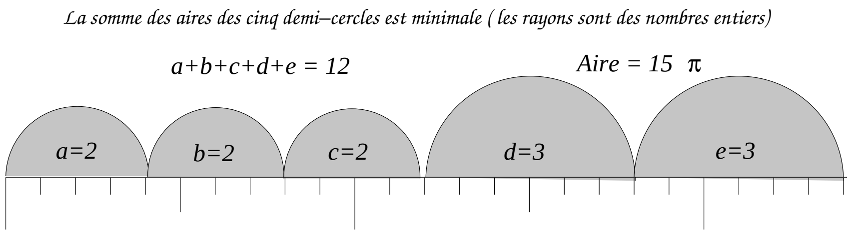

FIG. 5 – **Aire minimale**