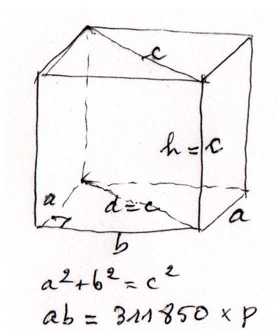
Les nombres « gelés » d'Antoine de Saint-Exupéry

Antoine de Saint-Exupéry disparut le 31 juillet 1944. Quelques jours avant, le 15 juillet, il posa le problème suivant à son ami le capitaine Max Gelée.
Un parallélipipède rectangle dont la hauteur est égale à la diagonale du rectangle de base est exactement constitué par des dés cubiques de 1 cm de côté. La surface du rectangle de base est égale au produit de 311 850 par un nombre premier inconnu. Calculer la hauteur du parallélipipède.

Que le parallélipipède rectangle soit exactement constitué par des dés cubiques revient à dire que les côtés a, b, c du parallélipipède sont entiers (naturels positifs et non nuls).



La surface du rectangle de base est égale au produit de 311850 par un nombre premier p inconnu, revient à dire que $p \times \frac{311850}{2} = 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times p$ est un nombre congruent et que les côtés d'un triangle rationnel correspondant sont entiers.

Remarque Une condition nécessaire est donc qu'il existe un nombre congruent $D = 7 \times 11 \times p$ avec p premier. En consultant une liste de nombres congruents, on montre que les valeurs de p pour lesquelles $77p$ est congruent, sans facteurs carrés sont $2, 3, 17, 19, 37, 41, 43, 59, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 107, 109, \ldots$ Mais cette liste est inutile, seul 2 convient comme on va le voir.

Montrons que $p = 2$. Lorsque (a, b, c) sont les côtés entiers d'un triangle rectangle, il existe deux entiers r et t tels que l'on ait, à une permutation près des côtés, $a = 2rt$, $b = r^2 - t^2$ et $c = r^2 + t^2$.
D'où $a \times b = 2rt(r^2 - t^2)$ ce qui donne $rt(r^2 - t^2) = 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times p$.
Si le nombre premier p est différent de 2, alors $r, t, r^2 - t^2$ sont impairs, ce qui est absurde car r, t impairs entraîne $r^2 - t^2$ pair.
On en conclut que p est égal à 2.
Comme $2 \times 77 = 154$ est congruent, nous savons que 311850 est congruent et

donc que $ab = 2 \times 311850 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11$.

Il y a des solutions rationnelles, certaines sont peut-être entières.
Si l'on connaît tous les triangles rectangles à côtés entiers, d'aire 2×311850, le problème est terminé, sinon un très simple programme (langage bc) va nous les chercher. Vous n'aurez aucun mal à adapter ce programme à un autre langage que bc.
Pour cela on parcourt la moitié des $3 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 = 180$ diviseurs de 623700 pour obtenir les deux solutions suivantes
1) $a = 756, b = 825, c = 1119$ et 2) $a = 540, b = 1155, c = 1275$.

```
define tri() {
  auto  i, j, k, l, m, a0, a1, a2, a3, a4, p, u, a, b, c, x;
  a0=1;
  for(i=0; i<=1; i++) {
     a1=1;
     for(j=0; j<=4; j++) {
        a2=1;
        for(k=0; k<=2; k++) {
           a3=1;
           for(l=0; l<= 1; l++) {
              a4=1;
              for(m=0; m<=1; m++) {
                 scale=0
                 x = a0*a1*a2*a3*a4;
                 b = 311850/x;
                 a = 2*x;
                 c = sqrt(a*a+b*b);
                 if(c%1 == 0 && a*a+b*b-c*c==0) {
                      print a," ",b," ",c,"\n";
                 }
                 a4 *= 11;
             }
             a3 *=7;
          }
          a2 *= 5;
       }
       a1 *= 3;
    }
    a0 *= 2;
  }
}
t=tri();
quit;
```

Références :

Le problème des nombres gelés de Saint-Exupéry par *Lazare Georges Vidiani* CultureMath. http://www.dma.ens.fr/culturemath/contenu/dossiers.html#pharaon

Déc. 2009 Jean-Paul Davalan http://linenn.davalan.eu/pdf/gelee.pdf